



TITLE:

2成分ボース・アインシュタイン凝縮体における対向超流動の不安定性 (オイラー方程式の数理解析: 力学と変分原理250年)

AUTHOR(S):

石野, 隼伍

CITATION:

石野, 隼伍. 2成分ボース・アインシュタイン凝縮体における対向超流動の不安定性 (オイラー方程式の数理解析: 力学と変分原理250年). 数理解析研究所講究録 2011, 1749: 110-120

ISSUE DATE:

2011-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171099>

RIGHT:

2 成分ボース・アインシュタイン凝縮体における対向超流動の不安定性

石野 隼伍

Syungo Ishino

大阪市立大学院理学研究科

Department of Physics, Osaka City University

2010 年 11 月 5 日

1 イントロダクション

量子流体における流体力学的不安定性は特徴的なパターン形成や量子乱流状態を引き起こす。量子流体である超流動ヘリウム 4 やヘリウム 3、ボースアインシュタイン凝縮体 (BEC) において、そういった不安定性はよく研究されてきた。中でも 2 成分 BEC は面白い量子渦の構造 [1] やケルビン・ヘルムホルツ不安定性 [2]、レイリー・テイラー不安定性 [3] のような特徴的な流体力学的不安定性現象を引き起こす系として知られている。

我々は 2 成分 BEC が混ざり合った系を考える。2 成分 BEC は同成分間相互作用と異成分間相互作用のパラメータの比によって、混ざった状態と相分離した状態のどちらかを安定状態とする。本研究では混合系の 2 成分 BEC が相対速度を持って流れている系 (対向超流動) の不安定性について議論する。

対向超流動は相対速度がある臨界値を超えると不安定となり、量子渦を生成する。そして、この量子渦が複雑に絡まり合うことで2成分量子乱流となる。量子乱流における渦は循環が量子化されており、古典乱流よりも単純であるため、古典乱流解明につながると考えられており、1成分の量子乱流においては古典乱流における最も重要な統計則であるエネルギースペクトルのコルモゴロフ則が成り立つことが分かっている [4]。成分間の相互作用が斥力である2成分 BEC は片方の成分の渦のコアを他方の成分が埋めるために速度場の発散を逃れ、1成分より古典流体に近い振る舞いをする。そのため2成分量子乱流は乱流研究の新しい舞台になると期待される。

2 対向超流動の不安定性

2成分 BEC は巨視的波動関数

$$\Psi_j = \sqrt{n_j} e^{i\phi_j} \quad (j=1,2) \quad (1)$$

によって記述され、連立 Gross-Pitaevskii (GP) 方程式 [5]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_j = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_j} \nabla^2 + V_j(\mathbf{r}) + \sum_k g_{jk} |\Psi_k|^2 \right) \Psi_j \quad (2)$$

に従う。ここで、 m_j と $V_j(\mathbf{r})$ はそれぞれ j 番目の成分の粒子質量と外力ポテンシャルである。係数 $g_{jk} = 2\pi\hbar^2 a_{jk}/m_{jk}$ は原子間相互作用を表し、 $m_{jk}^{-1} = m_j^{-1} + m_k^{-1}$ は換算質量、 a_{jk} は j 番目の成分と k 番目の成分との間の s-波散乱長である。我々の解析では混合系が安定な条件である $g_{11}g_{22} > g_{12}^2$ 、 $g_{jj} > 0$ の条件を満たしている [5]。

次に、一様系での対向超流動不安定性による臨界相対速度を線形解析により求める。一様系における定常状態の波動関数は $\Psi_j^0 = \sqrt{n_j^0} e^{ik_j \cdot \mathbf{r}}$ と書ける。ここで超流動速度は $\mathbf{V}_j = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi_j = \frac{\hbar}{m} \mathbf{k}_j$ である。定常状態の波動関数 Ψ_j^0 のまわりの揺らぎを

$$\delta\Psi_j = e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \mu_j t)} \{ u_j e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} - v_j^* e^{-i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \}. \quad (3)$$

とし、 $\Psi_j = \Psi_j^0 + \delta\Psi_j$ を GP 方程式に代入することで Bogoliubov-de Gennes 方程式

$$\sigma \mathcal{M} W = \hbar\omega W, \quad (4)$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \hat{h}_1 & g_{11}(\psi_1^0)^2 & g_{12}\psi_1^0\psi_2^{0*} & g_{12}\psi_1^0\psi_2^0 \\ g_{11}(\psi_1^{0*})^2 & \hat{h}_1 & g_{12}\psi_1^{0*}\psi_2^{0*} & g_{12}\psi_1^{0*}\psi_2^0 \\ g_{12}\psi_1^{0*}\psi_2^0 & g_{12}\psi_1^0\psi_2^0 & \hat{h}_2 & g_{22}(\psi_2^0)^2 \\ g_{12}\psi_1^{0*}\psi_2^{0*} & g_{12}\psi_1^0\psi_2^{0*} & g_{22}(\psi_2^{0*})^2 & \hat{h}_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ここで、} \hat{h}_j = -\frac{\hbar^2}{2m_j} \Delta + V_j(\mathbf{r}) + 2g_{jj}|\psi_j^0|^2 + g_{ij}|\psi_i^0|^2 - \mu_j,$$

$$W = \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{r}) \\ v_1(\mathbf{r}) \\ u_2(\mathbf{r}) \\ v_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を得る。式 (4) の演算子 $\sigma \mathcal{M}$ は非エルミートであるので、固有値 $\hbar\omega$ と固有ベクトル W は虚数に成り得る。

簡単のため、両成分の質量、相互作用係数、密度、速度場をそれぞれ $m_1 = m_2 = m$ 、 $g_{11} = g_{22} = g$ 、 $n_1^0 = n_2^0 = n^0$ 、 $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$ と対称にして固有値問題を解くと、励起の振動数 ω は

$$(\hbar\omega)^2 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon g n^0 + \frac{1}{4}|\mathbf{V}_R \cdot \mathbf{P}|^2 \pm \sqrt{(\varepsilon^2 + 2\varepsilon g n^0)|\mathbf{V}_R \cdot \mathbf{P}|^2 + 4\varepsilon^2 g^2 n^{02} \gamma^2}$$

となる。ここで $\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$ 、 $\mathbf{P} = \hbar\mathbf{q}$ 、 $\varepsilon = \frac{P^2}{2m}$ 、 $\gamma = g_{12}/g$ 。振動数が虚数 $(\hbar\omega)^2 < 0$ になると、系は動的に不安定となり、この条件から対向超流動不安定性の条件は

$$4\left(\frac{P^2}{4m^2} + \frac{gn^0}{m} - \frac{gn^0}{m}|\gamma|\right) < (\mathbf{V}_R \cdot \hat{\mathbf{P}})^2 < 4\left(\frac{P^2}{4m^2} + \frac{gn^0}{m} + \frac{gn^0}{m}|\gamma|\right) \quad (5)$$

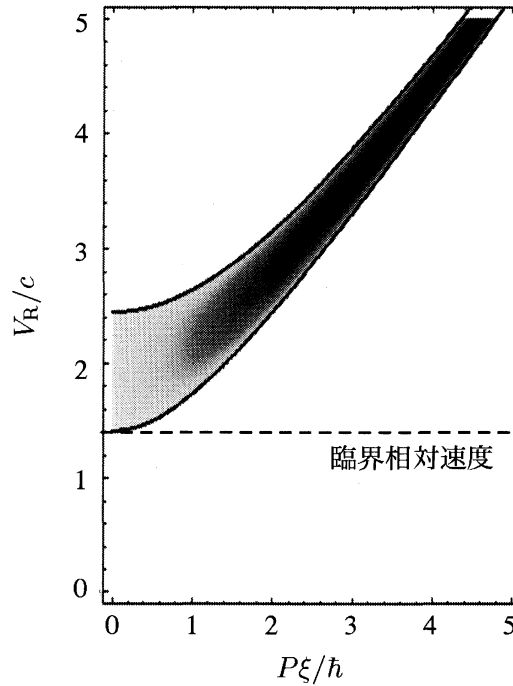


図 1 対向超流動の不安定の相図。横軸は \hbar/ξ ($\xi = \hbar/\sqrt{mgn^0}$ はコヒーレンス長) で規格化した励起モードの波数 P 、縦軸は音速 $c = \sqrt{gn^0/m}$ で規格化した相対速度 V_R 。色の濃い部分ほど励起の振動数の虚部が大きい。

となる。図 1 は $\gamma = 0.5$ の時の条件式 (5) を表しており、色の濃淡は振動数の虚部の大きさを表している（白い部分は $\text{Im}(\omega) = 0$ 、色が濃いほど虚部は大きい）。図 1 を見ると、ある相対速度の時の不安定モードには幅があるが、虚部の大きいところほど成長が早く、ダイナミクスに影響を与える。また、不安定になる最も小さな相対速度では $P = 0$ のモードが不安定であり、その時の相対速度が臨界値で

$$V_{\text{critical}} = 2\sqrt{\frac{gn^0}{m}(1-|\gamma|)} \quad (6)$$

である。

また、対向超流動不安定性の特徴として運動量交換がある。動的不安性は 2 成分間の運動量交換を引き起こし、対向超流動においては相対運

動を緩和する。各成分の運動量は $\mathbf{J}_j = \int d\mathbf{r} \frac{\hbar}{2i} (\Psi_j^* \nabla \Psi_j - \Psi_j \nabla \Psi_j^*)$ と定義でき、系全体の運動量は $\mathbf{J}_{\text{全}} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ となる。ある定常状態の波動関数 $\Psi_j = \sqrt{n_j} \exp(i \frac{m \mathbf{V}_j \cdot \mathbf{r}}{\hbar})$ に対して運動量は $\mathbf{J}_j^0/V = m n_j \mathbf{V}_j$ と書ける。ここで V は系の体積。この状態にある1つのモードの励起が起こり、波動関数が式(1)と(3)を用いて $\Psi_j = \Psi_j^0 + \delta \Psi_j$ と書けるとする。この時、運動量 \mathbf{J}_j の中に運動量変化 $\delta \mathbf{J}_j$ が存在するはずであり、それは $\delta \mathbf{J}_j/V = \hbar \mathbf{q} (|u_j|^2 - |v_j|^2)$ と書ける。ここで \mathbf{q} は不安定モードの波数である。また励起の前と後で粒子数 $N_j = \int dV |\Psi_j|^2$ は保存する。対向超流動の系は環境体や常流動成分のない孤立系であるので、全運動量は保存するはずであり、運動量を交換するためには $\delta \mathbf{J}_1 + \delta \mathbf{J}_2 = 0$ 、 $\delta \mathbf{J}_j \neq 0$ となる必要がある。この条件から $|u_1|^2 - |v_1|^2 = -|u_2|^2 + |v_2|^2 \neq 0$ が要求されるが、対向超流動の不安定モードはこれを満たしている。このため対向超流動不安定性の不安定モードの成長によって運動量交換を行う。運動量交換は特に位相欠陥の生成によって促され、相対速度を緩和する方向に働く。

3 一様系における対向超流動不安定性のダイナミクス

1章で述べたように対向超流動不安定性によって2成分量子乱流が生成される。この章では乱流遷移の過程を次元を落とした1次元系と2次元系でのダイナミクスを調べるにより明らかにする。そのために連立 GP 方程式を数値的に解く。一様系 $V_j(\mathbf{r}) = 0$ を考え、周期境界条件を課す。また、波動関数の初期状態は一様系の定常解(1)に不安定の種として微小なランダムノイズを加えたものにする。

最初に、1次元系のダイナミクスについて調べる。図2(a)は成分1と成分2の密度の時間発展を時空図で示したものである。図2(a)の左図が成分1で左から右に、右図が成分2で右から左に流れており相対速度は臨界速度を

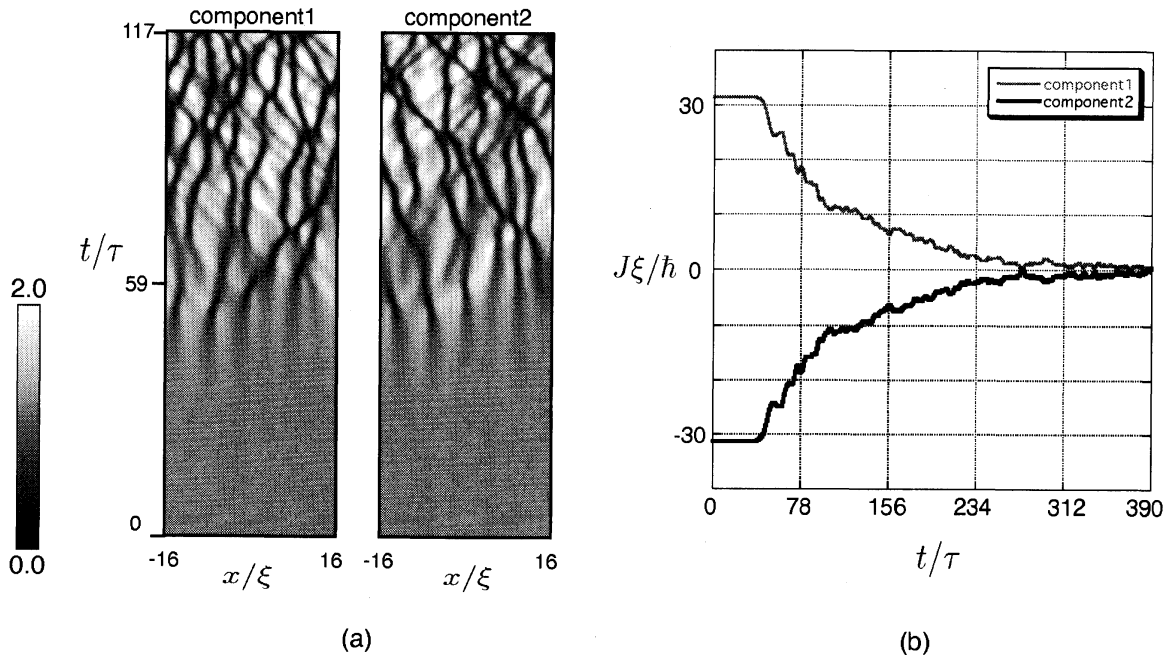


図 2 (a) 1 次元系における両成分の密度の時間発展。横軸は ξ で規格化した x 座標、縦軸は $\tau = \hbar/gn^0$ で規格化した時間 t 。初期パラメーターは $n^0 = 1.0$ 、 $|V_R|/V_{\text{critical}} = 1.39$ 、そして $\gamma = 0.5$ である。(b) 異なるノイズでの 20 の計算結果を平均して得た運動量の時間発展。

超えている。最初、密度は平らであるが、対向超流動不安定性によって両成分に相対速度に依存した波数の不安定モードが成長してくる。そして非線形性を通してその波はソリトンへと成長する。ソリトンは 1 次元系では安定であり、他のソリトンと衝突しながらも消えることなく時間発展する。この系では他成分にできたソリトンとの相互作用もあり、複雑な動きをしている。これをソリトン乱流 [6] といい、その性質は興味深く、今後の研究テーマでもある。図 2(b) はこの時の両成分の運動量である。上で示したように、対向超流動不安定性においては全運動量を保存したまま成分間で運動量を交換し、その相対速度を緩和する。数値計算結果においても運動量交換を見ることができている。

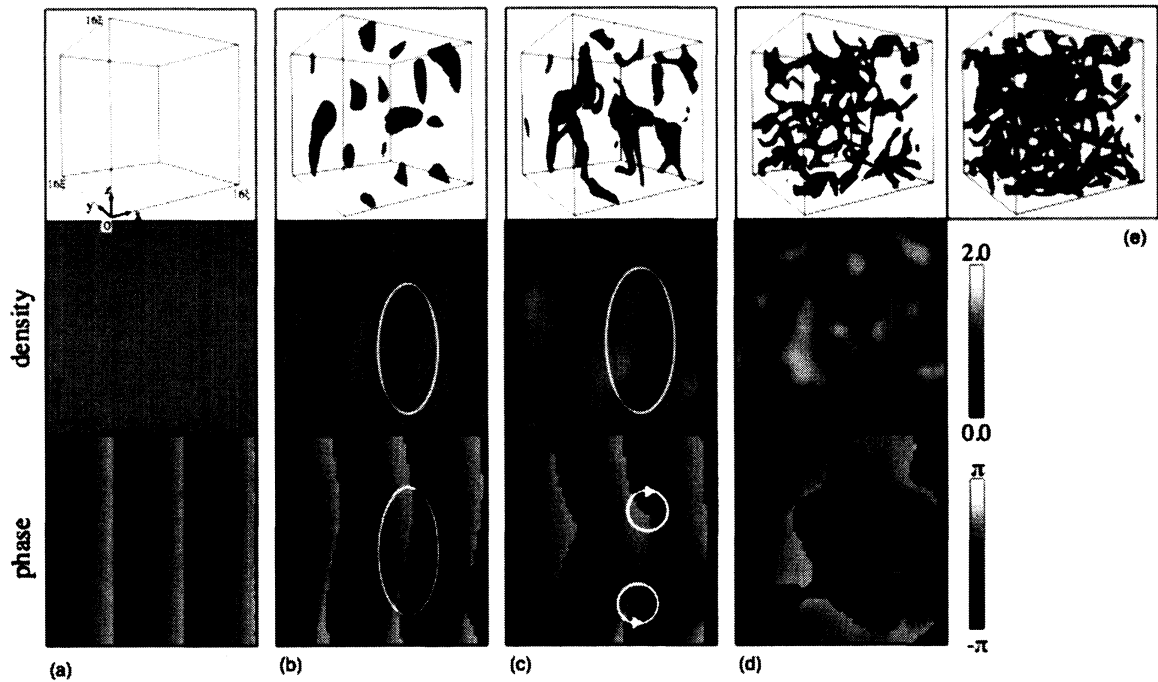


図3 3次元における成分1の密度 $n=0.1$ の等値面 (上図 (a)-(d)) と2成分量子乱流 (e)。3次元計算の $z=0$ 断面の密度 (中図) と位相 (下図)。初期パラメータは $n=1.0$ 、 $|V_R|/|V_{\text{critical}}|=1.66$ 、 $\gamma=0.5$ 。(a) $t/\tau=0$ 。初期状態。(b) $t/\tau=40$ 。不安定モードが成長しソリトンになる。(c) $t/\tau=43$ 。ソリトンが崩壊し、量子渦になる。(d) $t/\tau=58$ 。量子渦が絡まり量子乱流状態となる。(e) $t/\tau=58$ 。2成分量子乱流。

3次元系におけるダイナミクスは量子乱流遷移も含めて1次元系のダイナミクスとは大きく異なる。ソリトンができるまでの基本的なダイナミクスは同じであるが、3次元系ではソリトンは不安定であり、渦に崩壊する。図3(上図)は3次元の計算結果であり、(中図)(下図)はその3次元計算の $z=0$ 断面の密度と位相である。1次元と同じように不安定モードが成長しソリトンが生成され (b)、それが崩壊して渦になっているのが分かる (c)。生成された渦は他の渦と再結合を繰り返し、量子乱流へと発展していく (d)。このような機構で両成分とも量子乱流状態になり、2成分量子乱流となる (e)。

4 2成分量子乱流

量子流体中の渦（量子渦）の作る速度場は渦の中心において発散しており、渦中心から離れていくに従って r^{-1} で減衰していく。これは古典流体での渦とは全く異なるものとなっている。しかし、成分間の相互作用が斥力の2成分 BEC においては、片方の成分に量子渦があった時、その渦コアを他方の成分が埋める形になる。そのため、質量密度を ρ_j 、速度場を \mathbf{v}_j として定義される全質量流速 ($\mathbf{v} = (\rho_1 \mathbf{v}_1 + \rho_2 \mathbf{v}_2) / (\rho_1 + \rho_2)$) を考えると、これは渦の中心での発散を逃れ、古典流体での典型的な渦であるランキン渦の速度場によく似たものになる (図 4)。このため、1成分量子乱流では見ることでできなかった物理量をこの系で見ることができるようになる。

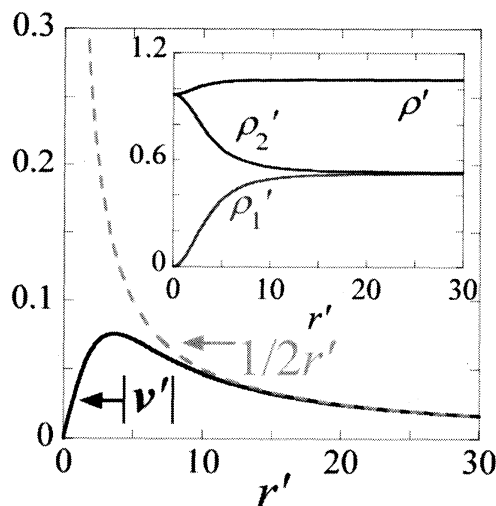


図 4 2成分 BEC における量子渦の全質量流速場 $|\mathbf{v}| = \sqrt{gn_0/m}|\mathbf{v}'|$ と密度 $\rho_1 = mn_0\rho'_1$ 、 $\rho_2 = mn_0\rho'_2$ 、 $\rho = \rho_1 + \rho_2$ 。座標は $r = \hbar r' / \sqrt{gmn_0}$ 。速度場はランキン渦と非常によく似ている。

5 トラップ系における対向超流動

これまでは一様系の議論であった。この章では実際の実験でどのように対向超流動不安定性を見るか、2成分量子乱流を作るかを提案する。

2成分 BEC は実際に実験で実現されており、様々な組み合わせが可能である。ここでは内部自由度の異なる2種類の BEC、 ^{87}Rb の超微細構造が $|F, m_F\rangle = |1, 1\rangle$ と $|2, -1\rangle$ 、を調和トラップに入れ、そこに磁場勾配をかける。すると、それぞれ調和トラップの中心から反対方向に動き、異なる位置で定常状態となる。これを初期状態とする。そして、磁場勾配を切ることで調和トラップの中心でぶつけることができる。2つの BEC がぶつかり、すり抜けようとして重なっている部分で対向超流動不安定性を見ることができると思われる。実際の実験でも2成分量子乱流を作ることが目標ではあるが、数値計算においてそれを見ることは難しい。そこで、まずは球対称な BEC の断面を2次元系の計算でどのようなダイナミクスが見れるか確かめる。

図5はその結果である。最初、2成分は磁場勾配によって分離しており (a)、磁場勾配を切ることで調和トラップの中心に落ちてくる (b)。ぶつかる時の相対速度はその磁場勾配の大きさによって決まるが、それが十分大きい時は一様系のように不安定モードが成長してくる (c)。そして、トラップ系においてもソリトンが生成され、渦に崩壊しているのが見れる。このようにトラップ系においても一様系と似たダイナミクスを見ることができ、3次元系では乱流状態が期待できる。

6 まとめと今後の課題

我々は2成分混合系 BEC における対向超流動不安定性についてそのダイナミクスを調べた。対向超流動不安定性によって励起された波は非線形性からソリトンに成長し、2次元、3次元空間ではそれが崩壊して渦となる。そ

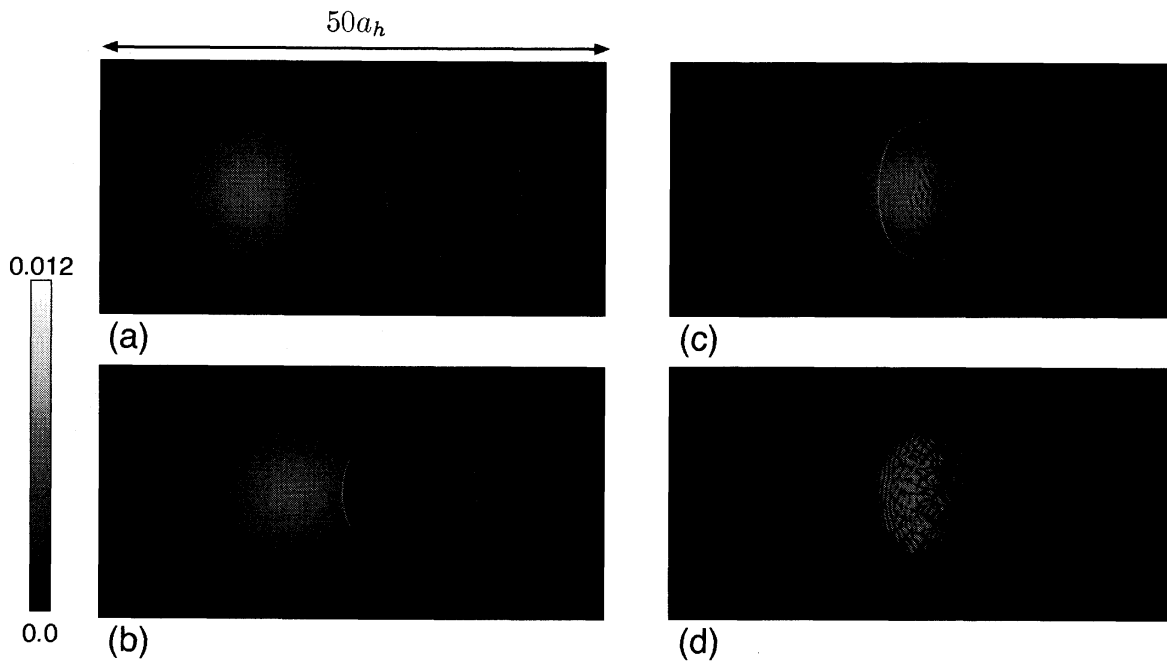


図5 トラップ系における対向超流動のダイナミクス。片方の成分はその密度プロファイルを、もう片方の成分は密度 $n=0.003$ の等値面を示す。パラメーターは $m=1.5\times 10^{-25}\text{kg}$ 、 $a=5.00\text{nm}$ 、粒子数は $N_1=N_2=1\times 10^6$ 。トラップ振動数は $\omega_r=2\pi\times 10$ 座標はトラップ長 $a_h=\sqrt{\hbar/m\omega_x}$ を単位としている。(a) $t\omega_r=0.0$ 。(b) $t\omega_r=1.0$ 。(c) $t\omega_r=1.5$ 。(d) $t\omega_r=1.8$ 。

してその渦が複雑に絡み合い、2成分量子乱流となる。また、この不安定性は2成分間の運動量交換を引き起こし、位相欠陥（ソリトンや量子渦）を作ることによってその相対速度を緩和する。この2成分量子乱流は古典乱流の研究の新しい舞台になると期待できる。対向超流動不安定性は実際に実験で見ることができ、トラップ系でも一様系と似たようなダイナミクスを示した。

今後は2成分量子乱流の統計的性質が古典乱流のものと対応するか、特に1成分量子乱流では定義できなかった全質量流速を使った統計量が興味深い。

参考文献

- [1] K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, *Int.J. Mod. Phys. B* **19**, 1835 (2005).
- [2] H. Takeuchi, N. Suzuki, K. Kasamatsu, H. Saito, and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **81**, 094517 (2010).
- [3] K. Sasaki, N. Suzuki, D. Akamatsu, and H. Saito, *Phys. Rev. A* **80**, 063611 (2009).
- [4] M. Kobayashi and M. Tsubota, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 065302 (2005); *J. Phys. Soc. Jpn.* **74**, 3248 (2005).
- [5] C. J. Pethick and H. Smith, *BOSE-EINSTEIN CONDENSATION IN DILUTE GASES* Second Edition (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [6] H. Sakaguchi, *Phys. Rev. E* **76**, 017205 (2007).